Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайгыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік ғылымдар сериясы

1997 жылдан бастап шығады

ВЕСТНИК ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика и компьютерные науки

Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 2 (2024)
Павлодар

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988
выдано
Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность
публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

https://doi.org/10.48081/PALS7230

МРНТИ 27.35.31

https://doi.org/10.48081/GDIP8789

А. А. Курманов, Н. А. Испулов, *А. Ж. Жумабеков
Торайгыров университет, Республика Казахстан, г. Павлодар

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕПОДВИЖНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В работе исследуются фундаментальные свойства решений уравнений Максвелла, описывающих свободные электромагнитные поля в неподвижных анизотропных средах. Особенность таких сред заключается в том, что их тензорные характеристики зависят от одной из пространственных координат, которая в данном исследовании выбрана как ось Z. Это означает, что свойства диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости меняются вдоль этой оси, создавая пространственную неоднородность. Исследование начинается с вывода и анализа матрицы коэффициентов, которая играет ключевую роль в описании электромагнитных свойств среды. Эта матрица позволяет формализовать влияние анизотропии и пространственной неоднородности на поведение электромагнитных волн. Кроме того, изучена структура матрицанта уравнений Максвелла, что представляет собой расширение классической матричной формы уравнений, учитывающее специфические свойства исследуемой среды. Такой подход обеспечивает более глубокое понимание процессов взаимодействия электромагнитных волн с анизотропной средой. Он позволяет не только описать характерные черты распространения волн, но и выявить новые эффекты, возникающие вследствие изменения тензорных характеристик вдоль оси Z. Полученные результаты могут быть полезны для разработки новых материалов и технологий, использующих уникальные свойства анизотропных сред, таких как усовершенствованные оптические устройства и системы связи.

Ключевые слова: анизотропная среда, уравнения Максвелла, гармонические электромагнитные волны, метод матрицанта, периодическая структура.

Введение

Распространение электромагнитных и упругих волн в среде имеет широкое применение в области проектирования передовых устройств. Существует связь между деформацией среды и созданием электромагнитного поля, например пьезоэлектрических, пьезомагнитных, магнитострикционных и термопьезоэлектрических материалов. Распространение электромагнитных волн в таких материалах связано с серьезными затруднениями и исследовалось многими учёными. В работе [1] была разработана формулировка для исследования рассеяния электромагнитных волн в изотропных средах с использованием матрицы переноса. Показано, что дифракция электромагнитных волн на полуплоскости в анизотропной среде сводится к правильным полевым выражениям для предельных случаев [2]. В [3] распространение ЭМ волн через границы среды исследовано с помощью продвинутого аналитического алгоритма. Преломление и отражение электромагнитных волн в анизотропной среде показывает, что существует случай, когда вектор Пойнтинга параллелен волне [4]. Более того, в случае квазиоднородной среды распространение электромагнитных волн показывает, что спектральная плотность и спектральная степень когерентности рассеянного поля могут быть разложены на множители как произведение двух частей, одна из которых зависит от поляризации падающего поля, а другой зависит от характеристик среды [5].

На основе метода матрицанта [6] исследовано распространение ЭМ волн в упругих, термоупругих анизотропных, анизотропных диэлектрических средах, в анизотропных пластинах и с магнитоэлектрическим эффектом, исследование распространения спиновых волн, волн в жидких кристаллах и распространения волн в термоупругих средах [7; 8].

Построение структуры матрицанта позволяет обобщить классические результаты Бриллюэна и Пароди для дискретных периодических структур на случай непрерывно неоднородных анизотропных сплошных сред.

В данной работе представлены результаты задачи о распространении электромагнитных волн в одномерных неоднородных анизотропных средах

Материалы и методы

Матрицант – фундаментальная матрица $X(t)$ решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x'(t) = A(t)x(t)$, $x(t) \in R^n$, $A(t)$ – представляет собой однопараметрическое семейство матриц, нормированных в точке t_0 [9].

Суть метода заключается в сведении исходных уравнений, основанных на методе разделения переменных (представляющих решение в виде плоских волн), к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Для полученной системы уравнений определяется структура матрицанта (нормированная матрица фундаментальных решений).

Матричный метод апробирован, и полученные результаты согласуются с ранее известными явлениями [10, 11].

Электромагнитные волны в материальных средах описываются уравнениями Максвелла:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad div\vec{D} = \rho, \qquad div\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

где ρ и $\vec{j}$ – объёмная плотность зарядов и вектор плотности тока, соответственно.

Закономерности распространения волн в различных анизотропных средах определяются структурой тензоров $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, а также зависимостью компонент этих тензоров от частоты и волнового вектора (уравнениями дисперсии):

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$, $\mu_{ij} = \mu_{ij}(\omega, \vec{k})$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\omega, \vec{k})$ (i, j = 1,2,3 или i, j = x, y, z).

При этом функции $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(z)$, $\mu_{ij} = \mu_{ij}(z)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z)$, в общем случае полагаются кусочно-непрерывными.

Рассматривая проводящие среды, будем учитывать лишь наведённые токи. Объёмную плотность зарядов будем считать равной нулю ($\rho = 0$). Тензорные характеристики будем полагать симметричными, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \qquad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \qquad (2)$$

Анизотропные среды характеризуются обилием параметров. Одним из конструктивных путей преодоления этих трудностей является последовательное и детальное изучение свойств решений уравнений Максвелла в достаточно широком классе анизотропных сред с тем, чтобы установить закономерности этих решений от структуры тензорных величин, определяющих анизотропию среды. Естественно, что такое изучение целесообразно проводить на базе возможно более простых волн достаточно общей природы. В данном исследовании рассматриваются гармонически зависящие от времени решения уравнений Максвелла и метод разделения переменных относительно пространственных координат.

Нумеруя координаты (x,y,z) цифрами 1,2,3, связь между векторами индукций и напряжённостей электромагнитного поля $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ можно представить в виде:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, \; B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j \tag{3}$$

В проводящих средах эти материальные уравнения дополняются ещё одним:

$$j_i = \sigma_j E_j \tag{4}$$

С учётом высказанных выше исходных положений представление решений волновых полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ рассматриваются в виде:

$$\vec{f} = \vec{f}(\omega, z) e^{i(\omega t \pm k_x x \pm k_y y)}, \tag{5}$$

где – ω – циклическая частота,

– k_x, k_y – соответственно x – и y – компоненты волнового вектора $\vec{k}$. Свойства среды от координат x и y не зависят, т.е. среда полагается неоднородной вдоль оси Oz.

Кажущаяся переопределённость системы связана с тем, что последние два уравнения в системе (1), в данном случае, является следствием первых двух. Действительно, взяв операцию дивергенции от левых частей первой пары уравнений (1), получим:

$$div rot \vec{E} = 0, \quad div rot \vec{H} = 0,$$

что автоматически даёт

$$div \vec{B} = 0, \quad div \vec{D} = 0.$$

Тогда исходная система уравнений (1)-(5) приводится к виду:

$$rot_i \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu_{ij} H_j, rot_i \vec{H} = i(\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} - i\sigma_{ij}) E_j. \tag{6}$$

Эти уравнения в покомпонентной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-i\omega\mu_0(\mu_x H_x+\mu_{xy}H_y+\mu_{xz}H_z);\\
&\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-i\omega\mu_0(\mu_{yx}H_x+\mu_y H_y+\mu_{yz}H_z);\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-i\omega\mu_0(\mu_{zx}H_x+\mu_{zy}H_y+\mu_z H_z);\\
&\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_x-i\sigma_x)E_x+i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}-i\sigma_{xy})E_y+i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xz}-i\sigma_{xz})E_z;\\
&\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yx}-i\sigma_{yx})E_x+i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_y-i\sigma_y)E_y+i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz}-i\sigma_{yz})E_z;\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx}-i\sigma_{zx})E_x+i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zy}-i\sigma_{zy})E_y+i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_z-i\sigma_z)E_z.
\end{aligned}\tag{7}$$

Результаты и обсуждение

Используя представление решений для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в форме (5):

$$\begin{aligned}
&E_i(x,y,z,t)=E_i(z,\omega)e^{i(\omega t-k_x x-k_y y)},\\
&H_i(x,y,z,t)=H_i(z,\omega)e^{i(\omega t-k_x x-k_y y)},
\end{aligned}\tag{8}$$

и, подставив (8) в (7), получим систему четырёх дифференциальных и двух алгебраических уравнений:

$$\frac{dE_y}{dz}=-ik_y E_z+i\omega\mu_0(\mu_x H_x+\mu_{xy}H_y+\mu_{xz}H_z);\tag{9}$$

$$\frac{dH_x}{dz} = -ik_x H_z + i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yx} - i\sigma_{yx})E_x + i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_y - i\sigma_y)E_y + i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz} - i\sigma_{yz})E_z;$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -ik_y H_z - i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_x - i\sigma_x)E_x - i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy} - i\sigma_{xy})E_y - i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xz} - i\sigma_{xz})E_z;$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -ik_x E_z - i\omega\mu_0(\mu_{yx}H_x + \mu_y H_y + \mu_{yz}H_z);$$

$$E_z = -\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zy} - i\sigma_{zy}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z - i\sigma_z}E_y + \frac{k_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z - i\sigma_z}H_x - \frac{k_x}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z - i\sigma_z}H_y - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx} - i\sigma_{zx}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z - i\sigma_z}E_x;$$

$$H_z = \frac{k_x}{\omega\mu_0\mu_z}E_y - \frac{\mu_{zx}}{\mu_z}H_x - \frac{\mu_{zy}}{\mu_z}H_y - \frac{k_y}{\omega\mu_0\mu_z}E_x.$$

Исключив из системы уравнений (9) величины E_z и H_z, получим замкнутую систему уравнений относительно E_y, H_x, H_y, E_x (выбор такого порядка в расположении компонент полей связан с разделением волн на ТЕ- и ТМ- поляризованные и их взаимной трансформацией):

$$\frac{dE_y}{dz} = i\left(k_y\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zy} - i\sigma_{zy}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z - i\sigma_z} + k_x\frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}}\right)E_y + i\left(\mu_0\mu_x\omega - \frac{k^2{}_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}} - \omega\frac{\mu_0\mu_{xz}^2}{\mu_{zz}}\right)H_x +$$

$$+ i\left(\omega\mu_0\mu_{xy} + \frac{k_x k_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}} - \omega\frac{\mu_0\mu_{xz}\mu_{yz}}{\mu_{zz}}\right)H_y + i\left(k_y\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx} - i\sigma_{zx}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}} - k_y\frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}}\right)E_x$$

$$\frac{dH_x}{dz} = i\left[\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yy} - \frac{k^2{}_x}{\omega\mu_0\mu_{zz}} - i\sigma_{yy} - (\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz} - i\sigma_{yz})\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zy} - i\sigma_{zy}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}}\right]E_y + \qquad (10)$$

$$+ i\left(k_y\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zy} - i\sigma_{zy}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}} + k_x\frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}}\right)H_x + i\left(k_x\frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} - k_x\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz} - i\sigma_{yz}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}}\right)H_y +$$

$$+ i\left[\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yx} + \frac{k_x k_y}{\omega\mu_0\mu_{zz}} - i\sigma_{yx} - (\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz} - i\sigma_{yz})\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx} - i\sigma_{zx}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}}\right]E_x$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -i[\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yx} + \frac{k_x k_y}{\omega\mu_0\mu_{zz}} - i\sigma_{yx} - (\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz} - i\sigma_{yz})\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx} - i\sigma_{zx}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}}]E_y -$$

$$-i(k_y\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx} - i\sigma_{zx}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}} - k_y\frac{\mu_{xz}}{\mu_{zz}})H_x + i(k_y\frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} + k_x\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xz} - i\sigma_{xz}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}})H_y +$$

$$+i(\frac{k_y^2}{\omega\mu_0\mu_z} - \omega\varepsilon_0\varepsilon_{xx} + i\sigma_{xx} + (\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xz} - i\sigma_{xz})\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zx} - i\sigma_{zx}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}})E_x$$

$$\frac{dE_x}{dz} = \quad i(k_x\frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} - k_x\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz} - i\sigma_{yz}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}})E_y - i(\omega\mu_0\mu_{xy} + \frac{k_x k_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} \quad i\sigma_{zz}}\omega\frac{\mu_0\mu_{xz}\mu_{yz}}{\mu_{zz}})H_x +$$

$$+i(\frac{k_x^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} \quad i\sigma_{zz}} - \omega\mu_0\mu_{yy} + \omega\mu_0\frac{\mu_{yz}^2}{\mu_z})H_y + i(k_y\frac{\mu_{yz}}{\mu_{zz}} + k_x\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xz} - i\sigma_{xz}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz} - i\sigma_{zz}})E_x$$

Запишем (10) в матричной форме:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = \hat{B}\vec{W}, \tag{11}$$

где $\vec{W} = (E_y, H_x, H_y, E_x)^t$ – вектор столбец

и $\hat{B}$ – в общем случае, непрерывная матричная функция в некотором интервале (z_1,z_2) изменения аргумента z, в дальнейшем называемая матрицей коэффициентов.

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$b_{11} = ik_y\frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_z};\ b_{12} = i(\omega\mu_0\mu_x - \frac{k^2{}_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z});\ \ b_{13} = i\frac{k_x k_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z};\ b_{14} = i\mathrm{k}_{\mathrm{y}}\frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_z};\ \ (12.1)$$

$$b_{21} = i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_y - \frac{k^2{}_x}{\omega\mu_0\mu} - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_z});\ b_{22} = b_{11};\ b_{23} = -ik_x\frac{\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_z};$$

$$b_{24} = i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy} + \frac{k_x k_y}{\omega\mu_0\mu} - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_z});$$

$$b_{31} = -b_{24};\; b_{32} = -b_{14};\; b_{33} = ik_x \frac{\varepsilon_{xz}}{\varepsilon_z};\; b_{34} = -i(\omega\varepsilon_0\varepsilon_x - \frac{k_y^2}{\omega\mu_0\mu} - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_z});$$

$$b_{41} = -b_{23};\; b_{42} = -b_{13};\; b_{43} = i(\frac{k_x^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z} - \omega\mu_0\mu);\; b_{44} = b_{33}.$$

Таким образом, система уравнений (1)-(5) приводится к системе четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (10) или к матричному уравнению (11).

Методом последовательных приближений исходя, из рекуррентных соотношений:

$$\frac{dT_k}{dz} = BT_{k-1} \qquad (13)$$

получаем матрицант в форме бесконечного матричного экспоненциального ряда:

$$\hat{T} = \hat{E} + \int_0^z \hat{B}dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} \hat{B}(z_1)\hat{B}(z_2)dz_1dz_2 + \ldots \qquad (14)$$

Аналогичное рекуррентное соотношение справедливо и для построения обратного матриканта:

$$\frac{dT^{-1}{}_k}{dz} = -T^{-1}{}_{k-1}B \qquad (15)$$

Поэлементное сравнение каждого из членов рядов:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n, \qquad T^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1},\; T_0 = E, \qquad T_0^{-1} = E \qquad (16)$$

позволяет установить структуру T^{-1}:

$$\hat{T}^{-1} = \begin{bmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34} \\ -t_{23} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{bmatrix}_{ч} - \begin{bmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34} \\ -t_{23} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{bmatrix}_{неч} \qquad (17)$$

где t_{ij} – элементы прямого матрицанта T, E – единичная матрица.

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}_{ч} + \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}_{неч} \quad (18)$$

Они означают, что сравнивались четные и нечетные элементы матричного ряда.

$$\hat{T} = \hat{E} + \int_0^z \hat{B} dz_1 + \frac{1}{2!}\int_0^z \int_0^{z_1} \hat{B}(z_1)\hat{B}(z_2) dz_1 dz_2 + \ldots$$

$$\hat{T}^{-1} = \hat{E} - \int_0^z \hat{B} dz_1 + \frac{1}{2!}\int_0^z \int_0^{z_1} \hat{B}(z_2)\hat{B}(z_1) dz_1 dz_2 - \ldots$$

Каждый из этих рядов представляет собой сумму матриц, $\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(n)}$ $\hat{T}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}^{-1}_{(n)}$

Индекс n равен количеству матриц, умноженных под знаком интеграла. Есть закономерность, различают n членов ряда с четными и нечетными значениями:

$\hat{T}_{Even} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(2n)}$, $\hat{T}_{Odd} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(2n+1)}$, $\hat{T}^{-1}_{Even} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}^{-1}_{(2n)}$, $\hat{T}^{-1}_{Odd} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}^{-1}_{(2n+1)}$

и есть представление:

$$\hat{T} = \hat{T}_{Even} + \hat{T}_{Odd}, \quad \hat{T} = \hat{T}^{-1}_{Even} + \hat{T}^{-1}_{Odd}$$

Структура матрицанта, указанная в уравнениях (17) и (18) отражает фундаментальные свойства решений уравнения (11) .

Более того, имеют место тождества:

$$\hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{E}$$

и вытекающие из них инвариантные соотношения:

$$\begin{array}{ll}
t_{11}t_{22}+t_{12}t_{21}-t_{13}t_{24}-t_{14}t_{23}=1; & -t_{21}t_{42}-t_{22}t_{41}+t_{23}t_{44}+t_{24}t_{43}=0; \\
t_{11}t_{12}=t_{13}t_{14}; & -t_{21}t_{32}-t_{22}t_{31}+t_{23}t_{34}+t_{24}t_{33}=0; \\
-t_{11}t_{42}-t_{12}t_{41}+t_{13}t_{44}+t_{14}t_{43}=0; & -t_{31}t_{42}-t_{32}t_{41}+t_{33}t_{44}+t_{34}t_{43}=1; \\
-t_{11}t_{32}-t_{12}t_{31}+t_{13}t_{34}+t_{14}t_{33}=0; & t_{33}t_{34}=t_{32}t_{31}; \\
t_{22}t_{21}=t_{24}t_{23}; & t_{42}t_{41}=t_{44}t_{43}.
\end{array} \tag{19}$$

отражают внутреннюю симметрию уравнений (10) и содержат в себе законы сохранения.

Заключение

Таким образом, в результате теоретических исследований получена система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой определяет свободные электромагнитные поля в одномерно-неоднородных анизотропных средах с проводимостью. Определена структура матрицы коэффициентов электромагнитных волн в анизотропных средах. Для анизотропных сред с неоднородной проводимостью вдоль оси Oz построена структура прямой и обратной матриц уравнений Максвелла. Как было показано, с помощью матричного метода можно получить дисперсионные уравнения для периодически неоднородной анизотропной среды. А также матрицант усредненной анизотропной среды с проводимостью получен в длинноволновом приближении в явном аналитическом виде.

Математическое моделирование показывает, что возможно получение индикатрис для некоторых прозрачных немагнитных кристаллов. Метод матрицанта позволяет моделировать волновой вектор в низкосимметричных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Loran, Farhang Mostafazadeh, Ali.** Transfer-matrix formulation of the scattering of electromagnetic waves and broadband invisibility in three dimensions. Journal // Of Physics A-Mathematical And Theoretical. – Volume: 53. – Issue: 16. – Article number: 165302. – Published: APR 24 2020.

2 **Umul, Yusuf Ziya.** Interaction of electromagnetic plane waves with an impedance half-plane in an anisotropic medium // APPLIED OPTICS. – Volume: 59. – Issue: 8. – P: 2359–2364. Published: MAR 10 2020.

3 **Li, Na; Hong, Decheng; Han, Wei.** IEEE transactions on geoscience and remote sensing. – Volume: 58. – Issue: 3. – P. 1644–1653. Published: Mar 2020.

4 **Entezar, S. Roshan; Habil, M.** Karimi. Refraction and reflection from the interface of anisotropic materials // PHYSICA SCRIPTA. – Volume: 94. – Issue: 8. Article number: 085502. – Published: AUG 2019.

5 **Wu, Hao; Pan, Xiaoning; Zhu, Zhanghang.** Reciprocity relations of an electromagnetic light wave on scattering from a quasi-homogeneous anisotropic medium // Optics Express. – Volume: 25. – Issue: 10. – P. 11297–11305. – Published: MAY 15 2017.

6 **Тлеукенов, С. К.** Метод марицанта. – Павлодар: Издательство «Кереку». 2004. – 172 с.

7 **Ispulov, N. A. Qadir, A., Shah, M. A., Seythanova, Ainur K., Kissikov, T. G., Arinov, E.** Reflection of thermoelastic wave on the interface of isotropic half-space and tetragonal syngony anisotropic medium of classes 4, 4/m with thermomechanical effect, Chinese Physics B, Number of article: 038102. – 2016. – https://doi.org/10.1088/1674-1056/25/3/038102

8 **Ispulov, N. A. Qadir, A., Zhukenov, M. K., Arinov, E.** The Propagation of Thermoelastic Waves in Anisotropic Media of Orthorhombic, Hexagonal, and Tetragonal Syngonies, Advances in Mathematical Physics, Number of article: 4898467. – 2017. – https://doi.org/10.1155/2017/4898467

9 **Gantmacher F. R.** The Theory of Matrices. – AMS Chelsea Publishing : Reprinted by American Mathematical Society, 2000. – 660 p. – ISBN 0821813765.

10 **Brillouin, L., Parodi, M.** Propagation of waves in periodic structures. – Moscow : Publishing House of Foreign Literature, 1959. – 457 p.

11 **Brekhovskikh, L. M.** Waves in layered media. – Moscow : Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1957.

Поступило в редакцию 12.06.24.
Поступило с исправлениями 12.06.24.
Принято в печать 21.06.24.

А. А. Курманов, Н. А. Испулов, *А. Ж. Жумабеков
Торайғыров Университеті, Қазақстан Республикасы, Павлодар қ.
12.06.24 ж. баспаға түсті.
12.06.24 ж. түзетулерімен түсті.
21.06.24 ж. басып шығаруға қабылданды.

ҚОЗҒАЛМАЙТЫН АНИЗОТРОПТЫ ОРТАДА ЭЛЕКТРОМАГНИТТІК ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ

Жұмыста қозғалмайтын анизотропты ортадағы бос электромагниттік өрістерді сипаттайтын Максвелл теңдеулерінің шешімдерінің негізгі қасиеттері зерттеледі. Мұндай орталардың *ерекшелігі - олардың тензорлық сипаттамалары берілген зерттеуде Z осі ретінде таңдалған кеңістіктік координаттардың біріне тәуелді, яғни диэлектрлік өткізгіштік пен магниттік өткізгіштік қасиеттері осы ось бойымен өзгеріп, кеңістіктік біртектілікті тудырады. Зерттеу ортаның электромагниттік қасиеттерін сипаттауда шешуші рөл атқаратын коэффициент матрицасын шығарудан және талдаудан басталады. Бұл матрица анизотропия мен кеңістіктік гетерогенділіктің электромагниттік толқындардың әрекетіне әсерін ресімдеуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, Максвелл теңдеулерінің матрицант құрылымы зерттелді, бұл зерттелетін ортаның ерекше қасиеттерін ескере отырып, теңдеулердің классикалық матрицалық формасының кеңеюі. Бұл тәсіл электромагниттік толқындардың анизотропты ортамен әрекеттесу процестерін тереңірек түсінуге мүмкіндік береді. Бұл толқындардың таралуына тән белгілерді сипаттауға ғана емес, сонымен қатар Z осі бойындағы тензорлық сипаттамалардың өзгеруінен туындайтын жаңа әсерлерді анықтауға мүмкіндік береді.алынған нәтижелер жетілдірілген оптикалық құрылғылар мен байланыс жүйелері сияқты анизотропты орталардың бірегей қасиеттерін пайдаланатын жаңа материалдар мен технологияларды әзірлеу үшін пайдалы болуы мүмкін.*

Кілтті сөздер: анизотропты орта, Максвелл теңдеулері, гармоникалық электромагниттік толқындар, матрицант әдісі, периодтық құрылым.

A. A. Kurmanov, N. A. Ispulov, *A. Zh. Zhumabekov
Toraighyrov University, Republic of Kazakhstan, Pavlodar
Received 12.06.24.
Received in revised form 12.06.24.
Accepted for publication 21.06.24.

ON THE PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN FIXED ANISOTROPIC MEDIA

The work examines the fundamental properties of solutions to Maxwell's equations describing free electromagnetic fields in stationary anisotropic media. The peculiarity of such media is that their tensor characteristics depend on one of the spatial coordinates, which in this study is chosen as the Z axis. This means that the properties of dielectric constant and magnetic permeability change along this axis, *creating spatial heterogeneity. The study begins with the derivation and analysis of the coefficient matrix, which plays a key role in describing the electromagnetic properties of the medium. This matrix allows us to formalize the influence of anisotropy and spatial heterogeneity on the behavior of electromagnetic waves. In addition, the structure of the matrix of Maxwell's equations has been studied, which is an extension of the classical matrix form of the equations, taking into account the specific properties of the medium under study. This approach provides a deeper understanding of the processes of interaction of electromagnetic waves with an anisotropic medium. It allows not only to describe the characteristic features of wave propagation, but also to identify new effects arising from changes in tensor characteristics along the Z axis. The results obtained can be useful for the development of new materials and technologies that use the unique properties of anisotropic media, such as advanced optical devices and systems communications.*

Keywords: anisotropic medium, Maxwell's equations, harmonic electromagnetic waves, matricant method, periodic structure.

Теруге 03.06.2024 ж. жіберілді. Басуға 28.06.2024 ж. қол қойылды.
Электрондық баспа
7,50 Mb RAM
Шартты баспа табағы 10,01. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан
Корректор: А. Р. Омарова
Тапсырыс № 4247

Сдано в набор 03.06.2024 г. Подписано в печать 28.06.2024 г.
Электронное издание
7,50 Mb RAM
Усл.печ.л. 10,01. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка Е. Е. Калихан
Корректор: А. Р. Омарова
Заказ № 4247

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған
«Торайғыров университеті» КЕ АҚ
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы
«Торайғыров университеті» КЕ АҚ
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz
www.vestnik.tou.edu.kz
https://vestnik-pm.tou.edu.kz/